УДК 525.233+ 550.312 (550.83)

Об одном способе уточнения фигуры Земли по значениям потенциала притяжения в ограниченной области

Ю.И. Дубовенко, nemishayeve@ukr.net, *Институт геофизики НАН Украины, г. Киев, Украина*

Невзирая на успехи в определении уклонения отвеса по спутниковым и наземным данным гравиметрии, не решены вопросы разрешимости граничных задач для определения превышений локальных участков геоида по данным силы тяжести.

Для приближения участков геоида предложена модификация метода Молоденского, которая позволяет определять пространственное распределение превышений геоида, аппроксимируя их точечными источниками по данным потенциала притяжения, заданным в ограниченной области. Определены соответствующие аналитические конструкции для силы тяжести, потенциала притяжения, аномалий высот геоида.

Поставлена граничная задача последовательного уточнения рельефа геоида по данным потенциала притяжения в ограниченной области. Для её решения средствами функционального анализа получено интегральное уравнение силы тяжести. Исходя из него, при ряде допущений относительно ориентации векторов реальной и нормальной силы тяжести получены аналитические аппроксимации для описания аномалий высот геоида и уточнения фигуры Земли – в виде линейного интегрального уравнения 1-го рода.

Исходя из приближений потенциала притяжения, определены высоты геоида в виде линейной граничной задачи с граничными условиями в виде нелинейного функционала над банаховым пространством области наблюдений. Она сведена к линейному интегральному уравнению 1-го рода для потенциала притяжения – уравнению фигуры Земли. Предложен итерационный алгоритм для вычисления приближений потенциала притяжения. Доказана сходимость последовательных итерационных приближений фигуры Земли. Эта сходимость считается доказательством существования решения в численном виде. Устойчивость вычислений обеспечивает применение способа Сизикова для численного решения интегральных уравнений 1-го рода.

On a certain approach for Earth figure definition by the values of attraction potential within the restricted area

Yu.I. Dubovenko, nemishayeve@ukr.net, *Institute of Geophysics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine*

In spite of the success in determining of plumb deviation by the satellite and ground gravity data there are not resolved the questions of solubility of boundary value problems for the determination of elevation of local geoid areas according to the gravity.

In order to approximate the geoid areas we propose the modification of Molodenskii approach which allow to determine the spatial distribution of the geoid elevations. The last ones were approximated by the point sources by the values of the attraction potential given in a limited domain. The appropriate analytical constructions for the gravity, the attractive potential, anomaly geoid heights are defined.

The boundary value problem of the successive specification of the geoid relief by the values of the attraction potential within a limited domain is formulated. For its solution by means of functional analysis, we deduce an integral equation of gravity. Proceeding from it, in a number of assumptions about the orientation of vectors of the real and normal gravity we derive the analytical approximations to describe the anomalies of geoid heights and correction of the Earth figure – in the form of a linear integral equation of first kind.

Based on the approximation of the attractive potential, we determine the geoid heights as a linear boundary value problem with the boundary conditions in the form of non-linear functional on Banach domain of observations area. The problem is reduced to a linear integral equation of the first kind for attraction potential – to the equation of the Earth figure. We propose an iterative algorithm for calculation of the approximations of attraction potential. The convergence of the successive iteration in the shape of the Earth approximations is proved. The convergence we consider as prove of numerical solution existence. A stability calculation is provided by the application of the Sizikov approach for numerical solution of 1-st kind integral equations.

Введение. Невзирая на успехи в определении уклонения отвеса (отклонения поверх-

ности геоида от сфероида) как по спутниковым [1], так и наземным данным [2] гравиметрии, остаются нерешёнными многие вопросы теоретического обоснования соответствующих методов, и в частности, о корректной постановке и разрешимости граничных задач для определения превышений геоида над земным эллипсоидом в различных системах отсчёта. Исходя из того, что поверхность геоида под сушей не поддаётся математической формализации, и лишь приближённо описывается квазигеоидом Молоденского, и вследствие динамического изменения поверхности геоида после крупных землетрясений и значительных тектонических движений, не теряет актуальности разработка новых способов определения локальных участков фигуры Земли по данным силы тяжести [3].

Альтиметрические методы уточнения структуры геоида [4] хорошо описывают участки морской поверхности, но имеют ограниченную точность над сушей вследствие снижения точности определения сферических гармоник на высоких степенях разложения в ряд по сферических функциях. Кроме того, в модели [1], полученной этими методами нет надлежащего учёта сферически несимметричной части глобального поля силы тяжести вдоль оси вращения планеты (её надлежит учитывать точечными источниками).

Для приближения участков геоида, по крайней мере, его высокочастотной области, можно применить некоторую модификацию метода Молоденского, которая позволяет определять пространственное распределение превышений геоида, аппроксимируя их точечными источниками по данным потенциала притяжения, заданным в ограниченной области. Исследование соответствующих аналитических конструкций предлагается вашему вниманию**1. Потенциал притяжения** $V(x)$**.** Пусть на гладкой поверхности ∂G, разделяющей ограниченную G^- и неограниченную G^+ части области G, заданы значения силы тяжести:

$$\tilde{g}(x)=\frac{\partial W(x)}{\partial n(x)},\ n(x)\perp \partial G_W=\{x: W(x)=C\}. \quad (1)$$

Пусть в области G^- определён центр тяжести в начале неподвижной системы декартовых прямоугольных координат $Ox_1x_2x_3$ (ее ограничения определим позже). Если область G^- вращается вокруг оси Ox_3 с постоянной угловой скоростью $\omega=|\varpi|$, то значения $g(x)$ силы тяжести на ∂G равны:

$$g(x)=\tilde{g}(x)-\omega^2\left(x_1\cos(\bar{n},x_1)+x_2\cos(\bar{n},x_2)\right),\ x\in\partial G. \quad (2)$$

Определённые по (2) значения $g(x)$ будут некоторым приближением $|grav V(x)|$, где $V(x)=W(x)-\Omega(x)$, $W(x)$ – потенциал силы тяжести, $\Omega(x)$ – центробежный потенциал, ибо нормали $n(x)\perp\partial G_W$ и $n_0(x)\perp\partial G_V$, где $\partial G_V=\{x: V(x)=c\}$, не совпадают. Однако мы можем пренебречь этим, считая что $(n(x),n_0(x))=0$.

Ставя задачу – определить по граничным данным (2) потенциал притяжения в виде

$$V(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial G}\frac{\mu(\xi)}{r(x,\xi)}d\sigma_\xi,\ x\in\bar{G}^+, \quad (3)$$

в итоге получаем для $\forall\ x\in G^+$ уравнение силы тяжести:

$$g(x)=\frac{1}{16\pi^2}\int_{\partial G}\int_{\partial G}\frac{\mu(\xi)}{r^2(x,\xi)}\frac{\mu(\eta)}{r^2(x,\eta)}\cos(\bar{\xi},\bar{\eta})d\sigma_\xi d\sigma_\eta. \quad (4)$$

На его основании после ряда функциональных преобразований получаем *нелинейное* интегральное уравнение для определения плотности $\mu(\xi)$, $\xi\in\partial G$ в виде:

$$\frac{3}{4}\mu^2(x)+\frac{1}{16\pi^2}\int_{\partial G}\int_{\partial G}\frac{\mu(\xi)}{r^2(x,\xi)}\frac{\mu(\eta)}{r^2(x,\eta)}\cos(\bar{\xi},\bar{\eta})d\sigma_\xi d\sigma_\eta=g(x),\ x\in\partial G. \quad (5)$$

Определив в выражении (5) функцию $\mu(\xi)$, $\xi\in\partial G$, можем вычислить потенциал $V(x)$, $x\in S(\xi,R)$ по формуле (3).

Все вычисления можно проводить при условии, что значения $g(x)$ определены. Но,

мы не знаем величин направляющих косинусов $\cos(n(x),x_i)$, $i=\overline{1,3}$ внутренней для области G^- нормали $n(x)$и, следовательно, не можем определить точно и сами значения $g(x)$.

Положим на первом этапе

$$\cos(n_0(x),x_i)=\cos(\rho,x_i), \tag{6}$$

и выполним необходимые вычисления. В результате получим приближенные значения потенциала притяжения $V^{(0)}(x)$, $x\in S(\xi,R)$.

2. Аномалии высот геоида $\xi(\varphi,\lambda)$. В разных точках пространства расстояние между эквипотенциальными поверхностями различно, в соответствии с различными значениями силы тяжести. Для придания физического смысла превышению одной точки поверхности ∂G над другой её точкой, например, *B* над *A*, или *C* над *A* (рис. 1), определим высоты в виде

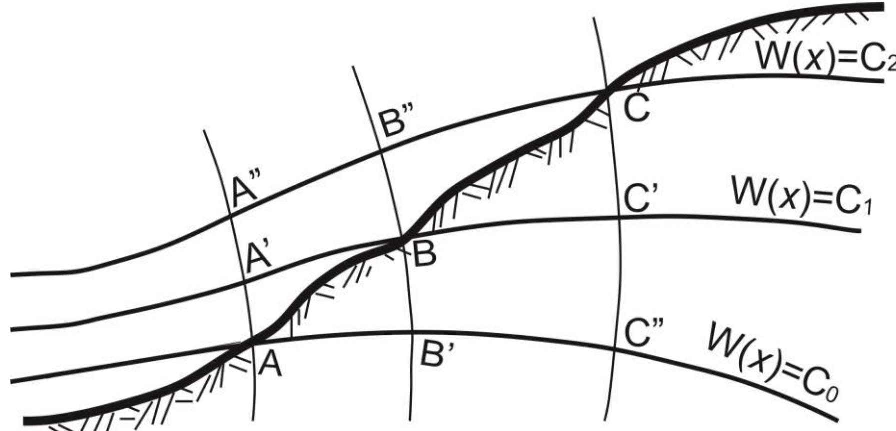


Рис. 1. Расхождение векторов реальной и нормальной силы тяжести при определении аномалий высот.

$$H_0(\varphi,\lambda)=\frac{1}{g_m(\varphi,\lambda)}\int\limits_{(AC)} g\cdot dh, \tag{7}$$

где интегрирование “нивелирных превышений” dh ведётся в поле силы тяжести вдоль силовой линии $CC'C''$, $g_m(\varphi,\lambda)$ – среднее значение силы тяжести на отрезке $CC'C''$. Так как величины $g_m(\varphi,\lambda)$ мы не знаем, вместо выражения (7) приходится вычислять следующее

$$H_\gamma(\varphi,\lambda)=\frac{1}{\gamma_m(\varphi,\lambda)}\int\limits_{(AC)} g\cdot dh, \tag{8}$$

где $\gamma_m(\varphi,\lambda)$ – среднее значение нормальной силы тяжести, т.е., значение γ_m в точке (φ,λ) при $H=0.5H_\gamma(\varphi,\lambda)$. Разность $H_0(\varphi,\lambda)-H_\gamma(\varphi,\lambda)$ будет отображать аномалию высоты

$$\xi(\varphi,\lambda)=H_0(\varphi,\lambda)-H_\gamma(\varphi,\lambda)=\frac{\gamma_m(\varphi,\lambda)-g_m(\varphi,\lambda)}{g_m(\varphi,\lambda)\cdot\gamma_m(\varphi,\lambda)}\int\limits_{(AC)} g\cdot dh. \tag{9}$$

Аномалии высот $\xi(M)$ определяют по методам Стокса-Пуанкаре и Молоденского из линейной граничной задачи для уравнения Лапласа с граничными условиями для искомой функции $T(M)$, задаваемыми в виде

$$\alpha(N)T(N)+\beta(N)\frac{\partial T(N)}{\partial\nu(N)}=g(M)-\gamma(N),$$

где *M* – неизвестная точка земной поверхности с высотой H_0, N – точка земной поверхности с высотой H_γ, $\alpha(N)=-\frac{1}{\gamma(N)}\frac{\partial\gamma(N)}{\partial\nu(N)}$, $\beta(N)\equiv1$.

Но указанное соотношение нецелесообразно для практического применения. Его можно упростить, сделав ряд допущений, в частности, о представлении потенциала силы тяжести в виде $W(M)=U(M)+T(M)$, и $\cos(n,\nu)\approx1$, где $U(M)$ – нормальный потенциал, $T(M)$ – возмущающий потенциал, $\nu(M)$ – внутренняя нормаль к уровню потенциала $U(M)=C$. Тогда

будем иметь соотношение

$$\frac{1}{\gamma(N)}\frac{\partial\gamma(N)}{\partial\nu(N)}\cdot T(N)+\frac{\partial T(N)}{\partial\nu(N)}=g(M)-\gamma(N). \qquad (10)$$

Если бы поверхность Земли с ортометрическими высотами H_0 находилась вне гипсометрической поверхности Σ, определяемой нормальными высотами H_γ, то решение $\xi(M)=T(M)/\gamma(M)$, $M\in\partial G$ задачи было бы гарантированно точное. Но для этого, как следует из выражения (9), нужно $\xi(M)>0$. А это условие не связано с граничным условием (10) и для его обеспечения придётся менять (10), т.е., решать другую граничную задачу.

Определим решение исходной задачи (2-5).

3. Определение рельефа $\rho(\varphi,\lambda)$. Нам известно приближенное значение потенциала $V^{(0)}(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial G}\frac{\mu(\xi)}{\gamma(x,\xi)}d\sigma_\xi$. Введём замену вида

$$x_1=R\sin\varphi_0\cos\lambda_0,\ x_2=R\sin\varphi_0\sin\lambda_0,\ x_3=R\cos\varphi_0,$$

$$\xi_1=\rho\sin\varphi\cos\lambda,\ \xi_2=\rho\sin\varphi\sin\lambda,\ \xi_3=\rho\cos\varphi.$$

Вычислим функционал:

$$I^2(\rho,\varphi,\lambda)=\left[\frac{\partial(\xi_2,\xi_3)}{\partial(\varphi,\lambda)}\right]^2+\left[\frac{\partial(\xi_3,\xi_1)}{\partial(\varphi,\lambda)}\right]^2+\left[\frac{\partial(\xi_1,\xi_2)}{\partial(\varphi,\lambda)}\right]^2.$$

Найдя соответствующие частные производные, получим

$$I^2(\rho,\varphi,\lambda)=\rho^2\left\{\rho^2\sin^2\varphi+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^2\sin^2\varphi+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\right)^2\right\}=\rho^2\left\{\left[\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^2\right]\sin^2\varphi+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\right)^2\right\},$$

и, следовательно, $d\sigma_\xi=\sqrt{\left[\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^2\right]\sin^2\varphi+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\right)^2}\,d\varphi d\lambda$, $\partial G=\{0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\lambda\le2\pi\}$.

Таким образом, задача (2-5) получила граничные условия в виде нелинейного функционала над пространством $C^{(1,\alpha)}(\partial G)$, непрерывного и дифференцируемого при $\rho<R$:

$$V^{(0)}(R,\varphi_0,\lambda_0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial G}f\left(\rho,\frac{\partial\rho}{\partial\varphi},\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\right)d\varphi d\lambda, \qquad (11)$$

где $f\left(\rho,\frac{\partial\rho}{\partial\varphi},\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\right)=\dfrac{\mu(\rho,\varphi,\lambda)\rho\sqrt{\left[\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^2\right]\sin^2\varphi+\left(\frac{d\rho}{\partial\lambda}\right)^2}}{\sqrt{R^2+\rho^2-2R\rho\cos\psi}}$, $\rho=\rho(\varphi,\lambda)$,

$\cos\psi=\cos\varphi\cos\varphi_0+\sin\varphi\sin\varphi_0\cos(\lambda-\lambda_0)$.

После ряда аналитических преобразований получим разность потенциала притяжения

$$\Delta V(\chi,\rho)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial G}\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}-\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial u}-\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial v}\right)m\,d\varphi d\lambda.$$

Отсюда легко получить *линейное* интегральное уравнение 1-го рода для искомой функции

$$\int\limits_{\partial G}K(x,\xi_n)\rho_{n+1}(\varphi,\lambda)d\varphi d\lambda=\tau(x),\ x\in S(\xi,R), \qquad (12)$$

где $m=\rho_{n+1}-\rho_n$, $K(x,\xi_n)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial f(\rho_n)}{\partial\rho}-\frac{\partial^2 f(\rho_n)}{\partial\varphi\partial u}-\frac{\partial^2 f(\rho_n)}{\partial\lambda\partial v}\right)$,

$$\tau(x)=V^{(0)}(x)-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial G}f\left(\rho_n,\frac{\partial\rho_n}{\partial\varphi},\frac{\partial\rho_n}{\partial\lambda}\right)d\varphi d\lambda+\int\limits_{\partial G}K(x,\xi_n)\rho_n(\varphi,\lambda)d\varphi d\lambda,$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial\rho}=\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}=\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\cdot\frac{1}{\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}}+\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\cdot\frac{1}{\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}}.$$

Вычислив $V^{(i)}\left(x^{(i)}\right)$, $i=0,1,2,...$, определим по формуле (12) значение $\rho_{n+1}^{(i)}(\varphi,\lambda)$ и затем в точках этой поверхности $\partial G^{(i)}$ – направляющие косинусы $\cos\left(n^{(i)}(x),x_j^{(i)}\right)$, $j=1,2,3$. Далее находим следующее приближение граничного условия (2) для отыскания потенциала $V^{(i+1)}\left(x^{(i)}\right)$, $i=0,1,2,...$ и т.д.

Вводя обозначения:

$$\rho_{n+1}=\rho_n+m_n,\ W_n=(\rho_n,u_n,v_n),\ u_n=\frac{\partial\rho_n}{\partial\varphi},\ v_n=\frac{\partial\rho_n}{\partial\lambda},\ \alpha=(R,\varphi_0,\lambda_0)\in\partial S,\ \beta=(\rho,\varphi,\lambda)\in\partial G,$$

$$\partial G=\left\{\langle\varphi,\lambda\rangle:0\le\varphi\le\pi;\ 0\le\lambda\le 2\pi\right\},\ F(\alpha,W)=F(\alpha,\rho,u,v)=\frac{1}{4\pi}\frac{\mu\rho\sqrt{(\rho^2+u^2)\sin^2\varphi+v^2}}{\sqrt{R^2+\rho^2-2R\rho\cos\psi}},\quad(13)$$

$$\cos\psi=\cos\varphi\cos\varphi_0+\sin\varphi\sin\varphi_0\cos(\lambda-\lambda_0),$$

получаем следующее уравнение фигуры Земли

$$\int_{\partial G}K_n(\alpha,\beta)m_n(\tilde\beta)d\tilde\beta=V(\alpha)-\frac{1}{4\pi}\int_{\partial G}F(\alpha,W_n)d\tilde\beta,\quad(14)$$

где $K_n(\alpha,\beta)=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial F(\alpha,W_n)}{\partial\rho}-\frac{\partial^2F(\alpha,W_n)}{\partial\varphi\partial u}-\frac{\partial^2F(\alpha,W_n)}{\partial\lambda\partial v}\right\}$.

4. Сходимость метода. Доказана сходимость последовательных приближений (14) фигуры Земли, представив его в виде последовательного итерационного уточнения:

$$\int_{\partial G}K_n(\alpha,\beta)m_n(\tilde\beta)d\tilde\beta=\int_{\partial G}K_{n-1}(\alpha,\beta)m_{n-1}(\tilde\beta)d\tilde\beta-\frac{1}{4\pi}\int_{\partial G}\left[F(\alpha,W_n)-F(\alpha,W_{n-1})\right]d\tilde\beta.\quad(15)$$

Обозначив экстремумы ядра $K_n(\alpha,\beta)$ как $\min_\alpha\left|\int_{\partial G}K_n(\alpha,\beta)d\tilde\beta\right|\ge K_-$ и $\max_\alpha\left|\int_{\partial G}K_n'(\alpha,\beta)d\tilde\beta\right|\le K_+$,

будем иметь для оценки искомой разности цепочку неравенств:

$$\left\|\rho_{n+1}(\tilde\beta)-\rho_n(\tilde\beta)\right\|_{B_1}\le\left(\frac{K_+}{K_-}\right)^{2^2}\left\|\rho_{n-2}(\tilde\beta)-\rho_{n-3}(\tilde\beta)\right\|_{B_1}^{2^3}\le...\le\left(\frac{K_+}{K_-}\right)^{2n-1}\left\|\rho_1(\tilde\beta)-\rho_0(\tilde\beta)\right\|_{B_1}^{2^n},\quad(16)$$

откуда и получаем в силу условий (12), (13) для выпуклой поверхности ∂G доказательство сходимости уравнения (14).

Выводы. Исходя из линейного интегрального уравнения силы тяжести (4), представленного в виде нелинейного уравнения для восстановления плотности, получены аналитические аппроксимации для описания аномалий высот геоида (9)-(10) и для уточнения фигуры Земли – в виде линейного интегрального уравнения 1-го рода (14). Для последнего указан итерационный способ нахождения последовательных приближений (15) и доказана его сходимость (18). Последнее обстоятельство при исходных предположениях о гладкости границы области ∂G и ограниченности ядра $K_n(\alpha,\beta)$ следует считать и доказательством существования решения в численном виде, исходя из предложения Маслова [5].

Ради обеспечения численной устойчивости алгоритма (14) следует избрать для его дискретизации и вычислений подход, изложенный в [6] для численного решения интегральных уравнений 1-го рода, в частности, заменив интегральное ядро $K_n(\alpha,\beta)$ интегральной суммой по методу трапеций при разбиении интервала интегрирования равномерной сетью точек.

Литература

1. *Reigber C., Schmidt R., Fletcher F., König R., Meyer U., Neumayer K.H., Schwintzer P., Zhu S.Y.* An Earth gravity field model complete to degree and order 150 from GRACE: EIGEN-GRACE02S // Jour-

nal of Geodynamics. – 2005b. – V. 39. – P. 1–10.

2. *Степанова И.Э.* Вычисление уклонений отвесной линии и превышений геоида в некоторых районах Атлантики с применением метода линейных интегральных представлений // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравиметрических, магнитных и электрических полей, Ухта, 29.01-3.02.2008 г.: Мат. 35-й сессии Межд. семинара им. Д.Г. Успенского. – Ухта: УГТУ, 2008. – С. 293–294.
3. *Дубовенко Ю.И.* Об уточнении аномалий геоида // Геофиз. журнал. – 2008. – 30, № 4. – С. 112–122.
4. *Кабан М.К., Гайгбер К.* Новые возможности гравитационного моделирования с использованием данных спутников CHAMP и GRACE // Физика Земли. – 2005, № 11. – С. 101–109.
5. *Маслов В.П.* Регуляризация некорректных задач для сингулярных интегральных уравнений // ДАН СССР. – 1967. – 176, №5. – С. 1012–1014.
6. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы программы. Справ. пособ. – К.: Наук. думка, 1986. – 544 с.